信賴區間例題

1. 一個社會學會想估計台灣青少年每週在家裡上網平均的時間。由台灣青少年抽取一組隨機樣本，並得到下結果：
   $n = 400$ (由台灣青少年抽出之樣本數)
   $\overline{x} = 57.7$ (每週在家裡上網的平均時間)
   $s = 10$ (每週在家裡上網時間的標準差)
   爲台灣青少年每週在家裡上網確實的平均時間，建立一個 95%的信賴區間
   Sol：
   $$57.7 - 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{400}} = 57.7 - 0.98 = 56.72$$
   $$57.7 + 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{400}} = 57.7 + 0.98 = 58.68$$
   $[\ 56.72\ ,\ 58.68\ ]$

2. 假設中華技術學院想要估計學生中擁有個人汽車的比例 p ，而隨機抽取 100 位學生，發現有 32 位學生有個人汽車，那麼 p 的95% 信賴區間如何呢?
   Sol：
   $\hat{p} = 0.32$
   $$0.32 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.32 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{100}} = 0.228$$
   $$57.7 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.32 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{100}} = 0.412$$
   $[\ 0.228\ ,\ 0.412\ ]$

3. 已知兩家餐館的早餐消費額皆呈常態分配，假設分別自兩家餐館隨機各抽取 $n_1 = 80$ 天、 $n_2 = 50$ 天獲得早餐消費額的平均數 $\overline{x_1} = 83$ 元、 $\overline{x_2} = 75$ 元，標準差 $s_1 = 15$ 元、 $s_2 = 10$ 元，試估計此兩家餐館早餐平均消費額差 $\mu_1 - \mu_2$ 的 95%信賴區間
   Sol：
   $\overline{x_1} = 83 \quad , \quad \overline{x_2} = 75$
   $$(83-75) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (83-75) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{225}{80} + \frac{100}{50}} = 8 - 4.3 = 3.7$$
   $$(83-75) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (83-75) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{225}{80} + \frac{100}{50}} = 8 + 4.3 = 12.3$$
   $[\ 3.7\ ,\ 12.3\ ]$

4. 台中精密螺絲公司所生產的 7 號螺絲，其標準直徑爲 3.8 公分。現抽樣 25 個螺絲作檢驗，得到樣本變異數 S^2 爲 0.25，試問在 95%的信賴水準下，母體變異數 σ^2 的信賴區間爲何?

Sol.

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \Rightarrow \sigma^2=\frac{(n-1)s^2}{\chi^2}$$

$$\left[\frac{24\times 0.25}{39.36},\frac{24\times 0.25}{12.40}\right]=[0.1524,0.4838]$$

5. 某校生輔組老師研究學校學生在課餘時間有兼差工作之比例，今隨機抽樣 80 位學生，其中 45 位有兼差，求學生兼差比例 95%的信賴區間

Sol：

$$\hat{p}=\frac{45}{80}=0.5625$$

$$0.5625-1.96\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}=0.5625-1.96\cdot\sqrt{\frac{(0.5625)(0.4375)}{80}}=0.5625-0.1087=0.4538$$

$$0.5625+1.96\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}=0.5625+1.96\cdot\sqrt{\frac{(0.5625)(0.4375)}{80}}=0.5625+0.1087=0.6712$$

$$[\ 0.4538\,,\,0.6712\ ]$$

6. 某教師隨機抽出男生 10 位，其平均成績爲 82 分，標準差爲 7；女生 13 位，其平均成績爲 79，標準差爲 8 分，若學生成績爲常態分布，試問

(1)兩母體變異數比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 95%信賴區間爲何?

(2)兩母體平均數差 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%信賴區間爲何?

Sol：

$$(1)F=\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}=\frac{s_1^2\sigma_2^2}{s_2^2\sigma_1^2} \quad \Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\frac{s_1^2}{s_2^2\cdot F}$$

$$F_{0.025(9,12)}=3.44 \quad ,F_{0.975(9,12)}=\frac{1}{F_{0.025(12,9)}}=\frac{1}{3.87}=0.258$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2\cdot F}=\frac{49}{64\cdot(3.44)}=0.223$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2\cdot F}=\frac{49}{64\cdot(0.258)}=2.968$$

$$[\ 0.223\,,\,2.968\ ]$$

信賴區間有包含 1，表示這兩個母體的變異數有可能相等

$(2)\overline{x_1}=82\quad,\quad \overline{x_2}=79\,,\ n_1=10\,,n_2=13\,,\quad d.f.=10+13-2=21$

$$s_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{9\cdot 49+12\cdot 64}{21}}=7.59$$

$$(82-79)-t_{0.025(21)}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=3-2.08\cdot(7.59)\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{13}}$$

$$=3-2.08\cdot(7.59)\cdot(0.42)=-6.63$$

$$(82-79)+t_{0.025(21)}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=3+2.08\cdot(7.59)\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{13}}$$

$$=3+2.08\cdot(7.59)\cdot(0.42)=12.63$$

$[-6.63\,,12.63\,]$

7. 某銀行之提款機提款操作的時間服從常態分配，今隨機抽出 10 筆操作時間:
3.5 2.4 3.2 2.5 4.8 5.6 3.4 4.5 4.3 5.8 (單位:分鐘)
(1)求 μ 之 95%信賴區間
(2)試分別求提款操作時間之變異數與標準差的 95%信賴區間
Sol：
(1) $\bar{x}=4,\quad s=1.19$

$$\bar{x}-t_{0.025(9)}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=4-2.262\cdot\frac{1.19}{\sqrt{10}}=4-0.851=3.149$$

$$\bar{x}+t_{0.025(9)}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=4+2.262\cdot\frac{1.19}{\sqrt{10}}=4+0.851=4.851$$

$[\,3.149\,,4.851\,]$

$$(2)\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\quad\Rightarrow\sigma^2=\frac{(n-1)s^2}{\chi^2}$$

$\chi^2_{0.025(9)}=19.02,\chi^2_{0.975(9)}=2.7$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2}=\frac{9\cdot(1.19)^2}{19.02}=0.67$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2}=\frac{9\cdot(1.19)^2}{2.7}=4.72$$

σ^2的信賴區間 $[0.67,4.72]$

σ的信賴區間 $[0.82,2.17]$