

型 I 誤差與型 II 誤差

感謝進專企一甲彭嘉惠同學提供答案

專有名詞

型 I 誤差：Type I error α 是對的但誤殺

型 II 誤差：Type II error β 是錯的但溜掉的

檢定力：

1. 機器剪布的問題中，若設定 $\bar{x} = 997$ mm 到 $\bar{x} = 1003$ mm 為接受 $\mu = 1000$ mm 的範圍，已知 $n = 36$ ， $\sigma = 12$ mm，

(a) 型 I 誤差的機率

Sol:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 1003) \\ &= P\left(z > \frac{1003 - 1000}{(12/\sqrt{36})}\right) \\ &= P\left(z > \frac{3}{2}\right) \\ &= P(z > 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 \\ &= 0.0668 \\ \therefore \alpha &= 13.36\% \end{aligned}$$

(b) 若機器移位，設定成 $\mu = 996$ mm，則型 II 誤差的機率為？

Sol:

$$\begin{aligned} P(997 < \bar{X} < 1003) \\ &= P\left(\frac{997 - 996}{2} < z < \frac{1003 - 996}{2}\right) \\ &= P(0.5 < z < 3.5) \\ &= 0.4998 - 0.1915 \\ &= 0.3083 \\ \therefore \beta &= 30.83\% \end{aligned}$$

(c) 檢定力為多少？

Sol:

$$1 - \beta = 100\% - 30.83\% = 69.17\%$$

2. 同上題，設 $\mu = 1000 \text{ mm}$ ， $\sigma = 12 \text{ mm}$ ， $n = 36$ ，

(a) 若型 I 誤差的風險為 10%，試計算 $\mu = 1000 \text{ mm}$ 的接受域

Sol:

$$\alpha = 10\% = 0.1/2 = 0.05$$

$$z = 1.645 \text{ (大約值)}$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})}$$

$$1.645 = \frac{\bar{X} - 1000}{2}$$

$$3.29 = \bar{X} - 1000$$

$$\bar{X} = 1003.29$$

\therefore 接受域 **【996.71, 1003.29】**

(b) 若機器移位，設定成 $\mu = 1004 \text{ mm}$ ，則型 II 誤差的機率為？

Sol:

$$P(996.71 < \bar{X} < 1003.29)$$

$$= P\left(\frac{996.71 - 1004}{2} < z < \frac{1003.29 - 1004}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{-7.29}{2} < z < \frac{-0.71}{2}\right)$$

$$= P(-3.65 < z < -0.36)$$

$$= 0.5 - 0.1406$$

$$= 0.3594$$

$$\therefore \beta = 35.94\%$$

(c) 檢定力為多少？

Sol:

$$1 - \beta = 100\% - 35.94\% = 64.06\%$$

3. 機器剪布的問題中，若設定 $\bar{x} = 997$ mm 到 $\bar{x} = 1003$ mm 為接受 $\mu = 1000$ mm 的範圍，若增加樣本數為 $n = 144$ ，($\sigma = 12$ mm)

(a) 型 I 誤差的機率

Sol:

$$\begin{aligned} & P(\bar{X} > 1003) \\ &= P\left(z > \frac{1003 - 1000}{(12 / \sqrt{144})}\right) \\ &= P(z > 3) \\ &= 0.5 - 0.4987 \\ &= 0.013 \\ &\therefore \alpha = 0.26\% \end{aligned}$$

(b) 若機器移位，設定成 $\mu = 995$ mm，則型 II 誤差的機率為？

Sol:

$$\begin{aligned} & P(997 < \bar{X} < 1003) \\ &= P\left(\frac{997 - 995}{1} < z < \frac{1003 - 995}{1}\right) \\ &= P(2 < z < 8) \\ &= 0.5 - 0.4472 \\ &= 0.0228 \\ &\therefore \beta = 2.28\% \end{aligned}$$

(c) 檢定力為多少？

Sol:

$$1 - \beta = 100\% - 2.28\% = 97.72\%$$

4.某家沐浴乳經過通路商調查 $\mu = 24$ (市佔率 24%)，標準差為 3.2。若設定 23.3 至 24.7 為接受 $\mu = 24$ 的接受域，若樣本數 $n = 80$ ，

(a)型 I 誤差的機率

Sol:

$$\begin{aligned} &P(\bar{X} > 24.7) \\ &= P\left(z > \frac{24.7 - 24}{(3.2/\sqrt{80})}\right) \\ &= P\left(z > \frac{0.7 \times 8.944}{3.2}\right) \\ &= P(z > 1.96) \\ &= 0.5 - 0.4750 \\ &= 0.025 \\ &\therefore \alpha = 5\% \end{aligned}$$

(b)若 $\mu = 23.0$ ，則型 II 誤差的機率為？

Sol:

$$\begin{aligned} &P(23.3 < \bar{X} < 24.7) \\ &= P\left(\frac{23.3 - 23}{(3.2\sqrt{80})} < z < \frac{24.7 - 23}{(3.2\sqrt{80})}\right) \\ &= P\left(\frac{0.3 \times 8.944}{3.2} < z < \frac{1.7 \times 8.944}{3.2}\right) \\ &= P(0.84 < z < 4.75) \\ &= 0.5 - 0.2995 \\ &= 0.2005 \\ &\therefore \beta = 20.05\% \end{aligned}$$

(c) 檢定力為多少？

Sol:

$$1 - \beta = 100\% - 20.05\% = 79.95\%$$