在積空間 A^n 之函數 $F(h)=h_M-h_m$ 的固定點

Fixed Points of Product Space A^n under the Function $F(h)=h_M-h_m$

張淙華 李柏堅

Tsorng-Hwa Chang Bor-Jian Lee

中華技術學院講師 中華技術學院講師

摘要

整數系中擁有許多有趣的性質，我們定義 A 爲 0 到 9 的整數，並以卡式積 $A\times\cdots\cdots\times A=A^n$ 來表示任意 n 位數字，再定義 F 爲 n 位數字對應到 n 位數字的映射，F 的對應方式是將原來的 n 位數重新排列，找到一個最大的數及一個最小的數，求其兩者之差，可得到另一個新的數。比如說在三位數中，以 327 爲例，F(327) =732-237 = 495，F(495) =954 –459 = 495。我們發現，以如此方法反覆對應，在三位數中無論從那一個數開始(數字不可全部相同)，都會得到一樣的結果，那就是 495，這就是固定點。這樣的有趣結果有點類似像黑洞的現象，而三位數以上的狀況爲本文將尋找及探索的目標。

關鍵詞：固定點，重新排列，等價關係

Abstract

There are many interesting algebraic properties in integers. Let A be a set of integers from 0 to 9. We construct n-digit numbers by Cartesian product $A\times\cdots\cdots\times A=A^n$, and define a mapping F from A^n to A^n, through which we obtain the value- the largest n-digit number by permutation subtracts the smallest n-digit number. For instance, in the case of $n=3$, we choose an arbitrary 3-digit number. Say, 327 , F(327) = 732 – 237 = 495, F (495) = 954 – 459 = 495. By this recurrence formula, we always get the same result $F(h)=h=495$, no matter what the initial number we choose (the 3 digits cannot be equal simultaneously). That is the fixed point of F. It is an interesting consequence similar to the “black holes” phenomenon .Our goal in this paper is to find and discuss those fixed points h in the case of $n>3$.

Keywords：fixed point，permutation，equivalence relation

前言

定義：設集合 $A=\{0,1,2,\cdots,9\}$，n 為正整數

$$A^n=\overbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}^{n}$$

$$G_n=A^n-\left\{\overbrace{p\cdots p}^{n}\ \middle|\ p=0,1,2,\cdots,9\right\}$$，我們在此定義 A^n 為任意 n 位數(0 可以放在前面)，而 G_n 表示為所有位數字不完全一樣的 n 位數。

定義：設 $\approx$ 為 G_n 的一等價關係(Equivalence Relation)，任意 $g,h\in G_n$ 為 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 排列組成

$$g=a_1a_2\cdots\cdots a_n$$

$$h=a_{i_1}a_{i_2}\cdots\cdots a_{i_n}$$ 在此，我們記作 $g\approx h$

定義：$H_n=G_n/\approx$ 為 G_n 關於 $\approx$ 之商空間(Quotient Space)

定義：設 $h\in G_n$，是由 $a_1,a_2\cdots\cdots,a_n\in A$ 所組成，

其中 $a_1\ge a_2\ge\cdots\cdots\ge a_n$

定義 $h_M=a_1a_2\cdots\cdots a_n$ 為關於 h 的最大值

$h_m=a_na_{n-1}\cdots\cdots a_1$ 為關於 h 的最小值

定義：令 $A=\{(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)\}$

$B=\{(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),(8,0)\}$

$C=\{(5,4),(6,3),(7,2),(8,1),(9,0)\}$

定義：$h=\overbrace{9\cdots9}^{T}x_1\cdots x_u\,y_u\cdots y_1\in G_n$，其中

$x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_u\ge y_u\ge\cdots\ge y_1$

某特定的 i,j $y_i=10-x_i$, $y_j=8-x_j$

而其他的 t，所有 y_t 為 $9-x_t$ 形式的組合

則令 $\phi_h=\{r\mid 1\le r\le u,\quad x_r=x_i\}$

$$\delta_h=\{r\mid 1\le r\le u,\quad x_r=x_j\}$$

定義：$h=a_1a_2\cdots\cdots a_n\in H_n$，$a_1\ge a_2\ge\cdots\cdots\ge a_n$

令 $\sigma_h=\max\limits_{1\le i\le n/2}\{i\mid a_i-a_{n+1-i}\ne 0\}$

定義： 對任意 $h \in G_n$，一對應 $F: G_n \to G_n$ ，定義 $F(h) = h_M - h_m$

定義： 對任意 $h \in G_n$，若 $F(h) = h$，我們稱 h 爲 F-固定點

定義：設 $h \in G_n$，若存在某一個 $g \in G_n$ 滿足對任意 $\varepsilon > 0$，存在一正整數 N，

當任何正整數 $t > N$ 時，恆有 $\left| F^t(g) - h \right| < \varepsilon$ h 爲 F-極限點，

並記作 $h = \lim\limits_{t \to \infty} F^t(g)$

主要結果

定理：設 $h, g \in G_n$， $\lim\limits_{t \to \infty} F^t(g) = h \Rightarrow F(h) = h$

證明： $\lim\limits_{t \to \infty} F^t(g) = h$

則對任意 ε 0，存在一正整數，使得任意 $t > N$ 恆有

$$\left| F^t(g) - h \right| < \varepsilon$$

當取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 時，$\left| F^t(g) - h \right| < \frac{1}{2}$ ，而 $F^t(g) - h$ 爲一整數

必定是 $F^t(g) - h = 0$

$$\Rightarrow F(h) = F(F^t(g)) = F^{t+1}(g) = h$$

■

本定理說明了任意一個 F-極限點必定也是 F-固定點

定理： $F(H_n) \subset H_n$

證明： 對任意 $h \in H_n$，我們可以找到 $a_1, \cdots\cdots, a_n \in \{0, 1, \cdots\cdots, 9\}$

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots\cdots \geq a_n$，使得 $h = a_1 a_2 \cdots a_n$ 表示之，當然；

$a_1 - a_n > 0$ ，假設 $\sigma_h = s$

$$h_M = a_1 \cdots\cdots\cdots a_s \overbrace{p \cdots p}^{T} a_{n-s+1} \cdots\cdots a_n$$

$$h_m = a_n \cdots\cdots a_{n+1-s} \overbrace{p \cdots p}^{T} a_s \cdots\cdots\cdots\cdots a_1$$

若 $F(h) = h_M - h_m$

$$= (a_1 - a_n) \cdots (a_{s-1} - a_{n+2-s})(a_s - a_{n+1-s} - 1) \overbrace{9 \cdots\cdots 9}^{T} [9 - (a_s - a_{n+1-s})] \cdots [9 - (a_2 - a_{n-1})] [10 - (a_1 - a_n)]$$

$= \overbrace{q\cdots\cdots q}^{n}$ ，其中 $q \in \{0,1,2,\cdots,9\}$

(1) 當 $T \neq 0$ 時， $q = 9 = a_1 - a_n = \cdots = a_{s-1} - a_{n+2-s}$

$= (a_s - a_{n+1-s}) - 1 = 9 - (a_s - a_{n+1-s}) = \cdots\cdots$

得 $a_1 - a_n = 9 = 10 - (a_1 - a_n)$ ，不可能

(2) 當 $T = 0$ 時， $q = a_1 - a_n = a_2 - a_{n-1} = \cdots = 9 - (a_2 - a_{n-1}) = 10 - (a_1 - a_n)$

得 $a_2 - a_{n-1} = \dfrac{9}{2}$ ，不可能

故 $F(h) \in H_n$ ，即 $F(H_n) \subset H_n$

∎

本定理說明了對應 F： $G_n \to G_n$ 對於 $\approx$ 具有封閉性，也就是說我們在此處的定義是合理的(Well-Defined)

性質 1： 已知 $(x_t, y_t) \in A$ ，$(x_i, y_i) \in B \cup C$ ，$(x_j, y_j) \in C$

$x_i \geq x_t > x_j \quad \Rightarrow y_i \leq y_t \leq y_j$

證明： $\because x_t > x_j$

$\Rightarrow -x_t < -x_j$

$\Rightarrow -x_t \leq -x_j - 1$

$\Rightarrow y_t = 10 - x_t \leq 9 - x_j = y_j$

同樣的， $x_i \geq x_t$

$\Rightarrow -x_i \leq -x_t$

$\Rightarrow 8 - x_i \leq 9 - x_i \leq 9 - x_t \leq 10 - x_t$

$\Rightarrow$ 任意 $x_i \in B \cup C$

$y_i \leq y_t$

∎

性質 2：已知 $(x_r, y_r) \in B$， $(x_i, y_i) \in C$， $(x_j, y_j) \in A \cup C$

$x_i > x_r \geq x_j \quad \Rightarrow y_i \leq y_r \leq y_j$

證明： $\because x_i > x_r$

$\Rightarrow -x_i < -x_r$
$\Rightarrow -x_i + 1 \le -x_r$
$\Rightarrow y_i = 8 - x_i + 1 \le 8 - x_r = y_r$

而 $x_r \ge x_j$

$\Rightarrow -x_r \le -x_j$

$\Rightarrow 8 - x_r \le 9 - x_r \le 9 - x_j < 10 - x_j$

$\Rightarrow$對任意 $x_j \in A \cup C$ ，$y_r \le y_j$

性質 3：已知 $(x_i, y_i) \in A$， $(x_j, y_j) \in B$

$x_i > x_j + 1 \Rightarrow y_i \le y_j$

證明： $\because x_i > x_j + 1$

$\Rightarrow -x_i < -x_j - 1$

$\Rightarrow -x_i \le -x_j - 2$

$\Rightarrow y_i = 10 - x_i \le 8 - x_j = y_j$

性質 4：已知 $(x_i, y_i) \in A$， $(x_j, y_j) \in B$

$x_i = x_j + 1 \Rightarrow y_i = 9 - x_j$, $y_j = 9 - x_i$

若非負整數排列 $x_1 x_2 \cdots\cdots x_s z_s \cdots\cdots z_1$ ， $s \ge 2$
$x_1 \ge \cdots\cdots \ge x_s \ge z_s \ge \cdots\cdots \ge z_1$，其中存在某 ϕ δ 使

$(x_\phi, y_\phi) \in A$ ， $(x_\delta, y_\delta) \in B$ ，任意其他 $i \notin \{\phi, \delta\}$恆有$(x_i, y_i) \in C$

假設 $x_\phi = a$ ， $x_\delta = b$在排序中，令$\phi = \max\limits_{1 \le j \le s} \{ j \mid x_j = a \}$

$$\delta = \max_{1 \le j \le s} \{ j \mid x_j = b \}$$

$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_s$組合與$y_1, y_2 \cdots\cdots y_s$組合一樣，則有下列結果：

定理：若$\delta < \phi$，則$x_1 x_2 \cdots\cdots x_s z_s \cdots\cdots z_1 = x_1 x_2 \cdots\cdots x_s y_s \cdots\cdots y_1$

定理：若$\delta > \phi$， $x_\phi = x_\delta + 1$ ，則

$$x_1 x_2 \cdots\cdots x_s z_s \cdots\cdots z_1 = x_1 x_2 \cdots\cdots x_s (9-x_s)\cdots\cdots(9-x_1)$$

定理：若$\delta > \phi$，$x_\phi \neq x_\delta + 1$，則

$$x_1 x_2 \cdots\cdots x_s z_s \cdots\cdots z_1 = x_1 x_2 \cdots\cdots x_s y_s \cdots\cdots y_1$$

綜合以上定理，可以得到一重要結果：

定理：任意$x_1 x_2 \cdots\cdots x_s z_s \cdots\cdots z_1 = x_1 x_2 \cdots\cdots x_s y_s \cdots\cdots y_1 \quad (I)$

或$= x_1 x_2 \cdots\cdots x_s (9-x_s)\cdots\cdots(9-x_1) \quad (II)$

必定成立

性質 A：若 $T>0, S>0, R\geq 0$，且 h 可表為下列型式

$$h = \overbrace{9\cdots9}^{T}\,\overbrace{8\cdots8}^{S}\,\overbrace{7\cdots7}^{S}\,\overbrace{6\cdots6}^{R}\,\overbrace{5\cdots5}^{S}\,\overbrace{4\cdots4}^{S}\,\overbrace{3\cdots3}^{R}\,\overbrace{2\cdots2}^{S}\,\overbrace{1\cdots1}^{S}\,\overbrace{0\cdots0}^{T}$$

則 h 必為 F 的固定點

性質 B：若 $T\geq 0$，且 h 可表為下列型式

$$h = 7\,\overbrace{6\cdots\cdots6}^{T}\,6\,4\,\overbrace{3\cdots\cdots3}^{T}\,1$$

，則 h 必為 F 的固定點

性質 C：若 $T\geq 1$，且 h 可表為下列型式

$$h = \overbrace{9\cdots\cdots9}^{T}\,\overbrace{5\cdots\cdots5}^{T}\,\overbrace{4\cdots\cdots4}^{T}$$

，則 h 必為 F 的固定點

性質 D：任意整數 $T\geq 0$，$S, R\geq 1$，$h = 9\,\overbrace{9\cdots9}^{T}\,9\,9\,8\,\overbrace{8\cdots8}^{S}\,7\,\overbrace{7\cdots7}^{S}\,\overbrace{6\cdots6}^{R}$

$$\overbrace{5\cdots5}^{S}\,5\,4\,\overbrace{4\cdots4}^{S}\,\overbrace{3\cdots3}^{R}\,\overbrace{2\cdots2}^{S}\,2\,\overbrace{1\cdots1}^{S}\,1\,0\,\overbrace{0\cdots0}^{T}$$

必為一 F-固定點

性質 E：任意整數 $T\geq 0$，$h = 9\,8\,7\,\overbrace{6\cdots6}^{T}\,6\,5\,4\,3\,\overbrace{3\cdots\cdots3}^{T}\,2\,1$

必為一 F-固定點

定理：若 $h\in H_n$，$\sigma_h = s \geq 2$，h 為 F-固定點

$$\Rightarrow h = \overbrace{9\cdots9}^{T}\,x_1 \cdots\cdots x_s z_s \cdots\cdots z_1$$

其中$x_1 \geq \cdots\cdots \geq x_s \geq z_s \geq \cdots\cdots \geq z_1$

$(x_1, z_{i_1}), (x_2, z_{i_2}), \cdots\cdots, (x_s, z_{i_s})$ 有一點在 A，一點在 B，$(s-2)$點在 C

證明：令 $h=a_1\cdots\cdots a_s\ a_{s+1}\cdots\cdots a_{2k+1-s}\ a_{2k+2-s}\cdots\cdots a_{2k+1}$

其中 $a_1\geq\cdots\cdots\geq a_s\geq\cdots\cdots\geq a_{2k+1}$ ，在此；我們僅考慮 $n=2k+1$ 即可， 因爲 $n=2k$ 與 $n=2k+1$ 的討論方式相同

$$h_M=a_1\cdots\cdots\cdots\cdots a_s\ \overbrace{a_{s+1}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2k+1-s}}^{T}\ a_{2k+2-s}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2k+1}$$
$$h_m=a_{2k+1}\cdots\cdots a_{2k+2-s}\ \ a_{2k+1-s}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{s+1}\ \ a_s\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_1$$

$$\Rightarrow a_{s+1}-a_{2k+1-s}=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_k-a_{k+2}=0$$

及 $a_{2k+1-s}=a_{s+1}\geq\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\geq a_{2k+1-s}$

$$F(h)=(a_1-a_{2k+1})\cdots\cdots\cdots(a_{s-1}-a_{2k+3-s})\left[(a_s-a_{2k+2-s})-1\right]9\cdots\cdots9$$
$$\left[9-(a_s-a_{2k+2-s})\right]\cdots\cdots\left[9-(a_2-a_{2k})\right]\left[10-(a_1-a_{2k+1})\right]$$

$$\text{即}F(h)=\overbrace{b_1\cdots\cdots\underbrace{b_s\,9\cdots\cdots9\ \ (8-b_s)}\cdots\cdots(9-b_2)(10-b_1)}$$

令 $t_1=\max\{b_1\ ,\ 10-b_1\}$

$t_s=\max\{b_s\ ,\ 8-b_s\}$

$t_i=\max\{b_i\ ,\ 9-b_i\}$

將 $t_1,t_2,\cdots\cdots,t_s$ 按大小順序排列爲 $x_1,x_2\cdots\cdots x_s$

將 $10-t_1,8-t_s,9-t_2,\cdots\cdots,9-t_{s-1}$ 按大小順序排列爲 $z_s,\cdots\cdots,z_1$

$F(h)$,h 有相同的 $a_1,a_2\cdots\cdots,a_{2k+1}$ 組合，所以

$$h=\overbrace{9\cdots\cdots9}^{T}\ x_1\cdots\cdots x_s\ z_s\cdots\cdots z_1\qquad\text{得證}$$

∎

定理：若 $h=a_1a_2\cdots\cdots a_{2k}\in H_{2k}$ ，爲 F-固定點，

$\sigma_h=k$, $a_1=a_1-a_{2k}$, $a_{2k}=a_k-a_{k+1}-1$

則對於任意整數 $T>0$ ，$S>0$ ，$R\geq0$

$$h=\overbrace{9\cdots9}^{T}\overbrace{8\cdots8}^{S}\overbrace{7\cdots7}^{S}\overbrace{6\cdots6}^{R}\overbrace{5\cdots5}^{S}\overbrace{4\cdots4}^{S}\overbrace{3\cdots3}^{R}\overbrace{2\cdots2}^{S}\overbrace{1\cdots1}^{S}\overbrace{0\cdots0}^{T}$$

證明：

$$h_M=a_1\cdots\cdots\cdots a_k\,\vdots\,a_{k+1}\cdots\cdots\cdots a_{2k}$$
$$h_m=a_{2k}\cdots\cdots a_{k+1}\,\vdots\,a_k\cdots\cdots\cdots\cdots a_1$$
$$\Rightarrow F(h)=(a_1-a_{2k})\cdots\cdots\cdots(a_{k-1}-a_{k+2})\left[(a_k-a_{k+1})-1\right]\left[9-(a_k-a_{k+1})\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\left[9-(a_2-a_{2k-1})\right]\left[10-(a_1-a_{2k})\right]$$

而 $a_1-a_{2k}\geq a_2-a_{2k-1}\geq\cdots\cdots\cdots\cdots\geq a_k-a_{k+1}$

$9-(a_k-a_{k+1})\geq\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\geq9-(a_2-a_{2k-1})$

$\Rightarrow a_1 = a_1 - a_{2k}$ ，及 $a_{2k} = a_k - a_{k+1} - 1$

得 $a_{2k} = 0$

$a_k - a_{k+1} = 1$

$\Rightarrow$(1) 當 $a_1 = 9$ 時，$F(h) = 9 \cdots\cdots 0\,8 \cdots\cdots 1$

$$\begin{array}{rl} & \quad\quad \geq \quad\quad \vdots \quad \leq 4 \\ h_M = & \cdots\cdots\cdots\, a_k \vdots a_{k+} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -h_m = & 0 \cdots\cdots\cdots a_{k+1} \vdots a_k \cdots\cdots\cdots\cdots 9 \\ \hline F(h) = & \boxed{9} \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \quad 8 \cdots\cdots\cdots\cdots \boxed{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad \geq 5 \quad \vdots \quad \leq 4 \\ \Rightarrow h = a_1 \cdots\cdots\cdots a_k \vdots a_{k+1} \cdots\cdots\cdots a_{2k} \\ \quad\quad \boxed{9} \cdots\cdots 8 \cdots\cdots 5 \quad 4 \cdots\cdots\cdots \boxed{1} \cdots\cdots 0 \end{array}$$

故由前面的定理得知

$$h = \overbrace{9\cdots\cdots9}^{T}\,\overbrace{8\cdots\cdots8}^{S}\,\overbrace{7\cdots\cdots7}^{P}\,\overbrace{6\cdots\cdots6}^{R}\,\overbrace{5\cdots\cdots5}^{V}$$

$$\overbrace{4\cdots\cdots4}^{V}\,\overbrace{3\cdots\cdots3}^{R}\,\overbrace{2\cdots\cdots2}^{P}\,\overbrace{1\cdots\cdots1}^{S}\,\overbrace{0\cdots\cdots0}^{T}$$

代入 $F(h)$ 解得 $T \geq 0$，$S = P = V \geq 0$，$R \geq 0$

(2) 當 $a_1 = 8$ 時，即

$$h = 8\overbrace{8\cdots8}^{T}\overbrace{7\cdots7}^{S}\overbrace{6\cdots6}^{P}\overbrace{5\cdots5}^{R}54\overbrace{4\cdots4}^{R}\overbrace{3\cdots3}^{P}\overbrace{2\cdots2}^{S}\overbrace{1\cdots1}^{T}0$$

代入 $F(h)$得

$$F(h) = 8\overbrace{7\cdots7}^{T}6\overbrace{5\cdots5}^{S}\overbrace{3\cdots3}^{P}\overbrace{1\cdots1}^{R}08\overbrace{8\cdots8}^{R}\overbrace{6\cdots6}^{P}\overbrace{4\cdots4}^{S}3\overbrace{2\cdots2}^{T}2$$

比較 h，$F(h)$ $\Rightarrow$ $P = P + 1$ 不可能

(3) 當 $a_1 \leq 7$時

$$\begin{array}{rl} h_M = & 7 \cdots\cdots\cdots\cdots 5\;4 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ -h_m = & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 4\;5 \cdots\cdots\cdots\cdots 7 \\ \hline F(h) = & 7 \cdots\cdots\cdots\cdots 0\;\boxed{8} \cdots\cdots\cdots\cdots 3 \end{array}$$

但 $8 \in \{a_1, \cdots\cdots, a_{2k}\}$ 得 $8 \leq a_1 = 7$ 不可能 ∎

定理： 設 $h=a_1a_2\cdots\cdots a_{2k}\in H_{2k}$ ，$\sigma_h=k$， h 爲 F-固定點

且 $a_1=a_1-a_{2k}$ ，$a_{2k}=9-(a_2-a_{2k-1})$

$\Rightarrow$ h 必爲性質 A 的型式，其中 $T\geq 2$

證明： $\begin{cases}a_1=a_1-a_{2k}\\ a_{2k}=9-(a_2-a_{2k-1})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{2k}=0\\ 9=a_2-a_{2k-1}\end{cases}$

$\Rightarrow a_{2k-1}=0$

$a_2=9$

$h_M=\boxed{9}\overbrace{9\cdots\cdots 9}^{T}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\boxed{1}\overbrace{0\cdots\cdots 0}^{T}$

$-\ h_m=0\cdots\cdots 01\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..$

$F(h)=\overbrace{9\cdots\cdots 9}^{T}8\cdots\cdots\cdots(a_k\text{-}a_{k+1}\text{-}1)\left[9-(a_k-a_{k+1})\right]$

$>\cdots\cdots\geq$ $\downarrow$ 和爲 8↵

知 h_M，$F(h)$之 9 個數不相等，不合要求

故

$h=9\ \overbrace{9\cdots\cdots 9}^{T}\ \boxed{8}\ \overbrace{8\cdots\cdots 8}^{S}\overbrace{7\cdots\cdots 7}^{P}\overbrace{6\cdots\cdots 6}^{R}\overbrace{5\cdots\cdots 5}^{V}$

$\overbrace{4\cdots\cdots 4}^{V}\overbrace{3\cdots\cdots 3}^{R}\overbrace{2\cdots\cdots 2}^{P}\overbrace{1\cdots\cdots 1}^{S}\ 1\ \overbrace{0\cdots\cdots 0}^{T}\ \boxed{0}$

與 $F(h)$ 比較係數個數得

$T\geq 2$

$P=V=S+1$，其中 $S\geq 0$

得 h 爲性質 A 型式，只是 $T\geq 2$ 而已 ∎

定理：設 $h=a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{2k}\in H_{2k}$ ，$\sigma_h=k$， h 爲 F-固定點

且 $a_1=9-(a_k-a_{k+1})$， $a_{2k}=(a_k-a_{k+1})-1$

則 h 必爲性質 B 型式

證明：由前面定理得 當 $\sigma_h=k$ 時

$h=x_1x_2\cdots\cdots x_k\vdots z_k\cdots\cdots z_1$

$\geq 5\vdots\leq 4$ (因 $x_k=4$，則 $z_k=4$，不合)

$\begin{cases}a_1=9-(a_k-a_{k+1})\\ a_{2k}=(a_k-a_{k+1})-1\end{cases}$ 造表得

$a_1 \ge 5$；$a_{2k} \le 4$

$a_k - a_{k+1}$	(a_k, a_{k+1})	a_1	a_{2k}
1	(5 ,4)	8	0
2	(5 ,3)　(6 , 4)	7	1
3	(5 ,2)　(6 , 3)	6	2
4		5	3

根據 $a_1 \ge \cdots\cdots \ge a_k > a_{k+1} \ge \cdots\cdots \ge a_{2k}$

(1) $(a_k, a_{k+1}) = (5, 4)$ ， $a_1 = 8, a_{2k} = 0$

$h_M =$ 8…………..5 4……………..0

$- h_m =$ 0…………..4 5……………..8

$F(h) =$ 8…………...0 8……………..2　　至少產生兩個 8

所以，

$$h_M = \overbrace{\cdots}^{T} \quad \overbrace{\cdots}^{S} \; \overbrace{\cdots}^{P} \cdots\cdots\cdots \overbrace{\cdots}^{P} \; \overbrace{\cdots}^{S} \quad \overbrace{\cdots}^{T}$$

$$h_m = 0\,\overbrace{1\cdots1}^{T}\,2\;\overbrace{2\cdots2}^{S}\,\overbrace{3\cdots3}^{P}\cdots\cdots\cdots\overbrace{6\cdots6}^{P}\,\overbrace{7\cdots7}^{S}\,8\,\overbrace{8\cdots8}^{T}\,8$$

$$\Rightarrow F(h) = 8\,\overbrace{7\cdots7}^{T}\,6\,\overbrace{5\cdots5}^{S}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\overbrace{6\cdots6}^{P}\cdots\cdot$$

$F(h)$ 有 P+1 個 6，而 h_M 有 P 個 6，不符合 F-固定點定義

(2) $(a_k, a_{k+1}) = (5, 3)$ ， $a_1 = 7$， $a_{2k} = 1$

h_M = 7……………5 3 …………..1

h_m = 0……………3 5……………7

F(h) = 7…………….1 7……………4　　　　有產生 4 的數

但 h_M 沒有 4，亦不合

(3) $(a_k, a_{k+1}) = (5, 2)$ ， $a_1 = 6$， $a_{2k} = 2$　[(6 , 3)的情形亦然]

h_M = 6……………5 2 …………..2

h_m = 2……………2 5……………6

F(h) = 4…………….2 6……………6　　　　有產生 4 的數

但 h_M 沒有 4，亦不合要求

(4) $(a_k, a_{k+1}) = (6, 4)$ ， $a_1 = 7$， $a_{2k} = 1$

可令 $h_M = 7\,\overbrace{7\cdots7}^{T}\,\overbrace{6\cdots6}^{S}\,6\,4\,\overbrace{3\cdots3}^{S}\,\overbrace{2\cdots2}^{T}\,1$

與 $F(h)$ 比較數字個數，得

$T=0$，任意 $S\geq 0$ ∎

定理：設 $h = a_1a_2\cdots\cdots a_{2k} \in H_{2k}$ ，$\sigma_h = k$， h 爲 F-固定點

且 $a_1 = 9-(a_k - a_{k+1})$， $a_{2k} = 9-(a_2 - a_{2k-1})$

$\Rightarrow$ h 無解

證明：

$$\begin{cases} a_1 = 9-(a_k - a_{k+1}) \\ a_{2k} = 9-(a_2 - a_{2k-1}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a_1 - a_{2k} = (a_2 - a_{2k-1}) - (a_k - a_{k+1})$，

已知 $a_1 \geq \cdots\cdots \geq a_k > a_{k+1} \geq \cdots\cdots \geq a_{2k}$

得 $a_1 - a_{2k} \geq a_2 - a_{2k-1} \geq \cdots\cdots \geq a_k - a_{k+1} \geq 0$

$\Rightarrow$ $a_1 - a_{2k} = (a_2 - a_{2k-1}) - (a_k - a_{k+1}) \leq a_2 - a_{2k-1} \leq a_1 - a_{2k}$

$\Rightarrow$ $a_1 - a_{2k} = a_2 - a_{2k-1}$

及 $a_k - a_{k+1} = 0$

但是已知 $\sigma_h = k$ 得知 $a_k - a_{k+1} \neq 0$

所以 h 無解

∎

定理：設 $h = a_1a_2\cdots\cdots a_{2k} \in H_{2k}$ ，$\sigma_h = k$， h 爲 F-固定點

且 $a_1 = 10-(a_1 - a_{2k})$， $a_{2k} = (a_k - a_{k+1}) - 1$

$\Rightarrow$ h 無解

證明：

$$\begin{cases} a_1 = 10-(a_1 - a_{2k}) \\ a_{2k} = (a_k - a_{k+1}) - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a_1 = \dfrac{10 + a_{2k}}{2}$ ，即可能 $a_{2k} = 0, 2$ 或 4

由表得

a_{2k}	$a_k - a_{k+1}$	(a_k, a_{k+1})	a_1
0	1	(5 , 4)	5
2	3	(6 , 3) , (5 , 2)	6
4	5	沒有	7

根據 $a_1 \geq \cdots\cdots \geq a_k > a_{k+1} \geq \cdots\cdots \geq a_{2k}$

(1) $(a_k, a_{k+1}) = (5, 4)$ ， $a_1 = 5, a_{2k} = 0$

$h_M = 5……………5\ 4\ …………..0$

$- h_m = 0……………4\ 5……………5$

F(h) = 5……………0 8……………5　　　　　　有產生 8，故不合

(2) $(a_k\ , a_{k+1}) = (6\ , 3)$　,　$a_1 = 6\ , a_{2k} = 2$

$h_M = 6……………6\ 3\ …………..2$

$- h_m = 2……………3\ 6……………6$

F(h) = 4……………2 6……………6　　　　　　有產生 4，故不合

(3) $(a_k\ , a_{k+1}) = (5\ , 2)$　,　$a_1 = 6\ , a_{2k} = 2$

$h_M = 6……………5\ 2\ …………..2$

$- h_m = 2……………2\ 5……………6$

F(h) = 4……………2 6……………6　　　　　　有產生 4，故不合

根據 (1) , (2) ,(3) 結果知 h 無解

∎

定理：設 $h = a_1 a_2 \cdots\cdots a_{2k} \in H_{2k}$　, $\sigma_h = k$, h 為 F-固定點

且 $a_1 = 10 - (a_1 - a_{2k})$,　$a_{2k} = 9 - (a_2 - a_{2k-1})$

$\Rightarrow$　h 無解

證明：

$$\begin{cases} a_1 = 10 - (a_1 - a_{2k}) \\ a_{2k} = 9 - (a_2 - a_{2k-1}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$　$(a_1 - a_{2k}) = 1 + (a_2 - a_{2k-1}) - (a_1 - a_{2k})$

$\Rightarrow$　$2\,(a_1 - a_{2k}) = 1 + (a_2 - a_{2k-1})$

而 $a_1 - a_{2k} \geq a_2 - a_{2k-1} \geq \cdots\cdots \geq a_k - a_{k+1} \geq 1$

$\Rightarrow$　$2\,(a_1 - a_{2k}) = 1 + (a_2 - a_{2k-1}) \leq 1 + (a_1 - a_{2k}) \leq 2(a_1 - a_{2k})$

$\Rightarrow$　$1 = a_1 - a_{2k} \geq a_2 - a_{2k-1} \geq \cdots\cdots \geq a_k - a_{k+1} \geq 1$

所以　　$a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots = a_k = p+1$

$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots\cdots\cdots a_{2k} = p$

其中 p 為某非負的整數

$\Rightarrow$　　$h_M = (p+1)……………(p+1)\ p\ ……………..p$

$h_m = ..p…………………p\ ..(p+1)…………(p+1)$

$F(h) = 1………1………0…8…………8$　　9

與 h_M 之數字根本不合，故無解

∎

綜合以上的定理，我們可得到重要的結果，即

定理：設$h = a_1 a_2 \cdots\cdots a_{2k} \in H_{2k}$ ，$\sigma_h = k$， h 爲 F-固定點

$\Rightarrow$ h 必爲性質 A 或性質 B 的形式

證明： 根據 $a_1 \geq \cdots\cdots \geq a_k > a_{k+1} \geq \cdots\cdots \geq a_{2k}$

$$h_M = a_1 \cdots\cdots a_{k-1}\ a_k\ a_{k+1} \cdots\cdots\cdots a_{2k-1}\ a_{2k}$$

$$h_m = a_{2k} \cdots\cdots a_{k+2}\ a_{k+1} a_k \cdots\cdots\cdots\cdots a_2\ a_1$$

得

$$F(h) = (a_1 - a_{2k}) \cdots\cdots\cdots\cdots (a_{k-1} - a_{k+2}) \left[(a_k - a_{k+1}) - 1\right]\left[9 - (a_k - a_{k+1})\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\left[9 - (a_2 - a_{2k-1})\right]\left[10 - (a_1 - a_{2k})\right]$$

而 $a_1 - a_{2k} \geq a_2 - a_{2k-1} \geq \cdots\cdots\cdots \geq a_{k-1} - a_{k+2} \geq a_k - a_{k+1} - 1$

$9 - (a_k - a_{k+1}) \geq \cdots\cdots\cdots\cdots \geq 9 - (a_2 - a_{2k-1})$ ，$10 - (a_1 - a_{2k})$

將 $F(h)$ ，h_M 比較數字，故

$a_1 = a_1 - a_{2k}$， $9 - (a_k - a_{k+1})$ 或 $10 - (a_1 - a_{2k})$

$a_{2k} = (a_k - a_{k+1}) - 1$ 或 $9 - (a_2 - a_{2k-1})$

∎

由前面定理可得到結果

現在，我們探討 n 爲奇數情形，如同 n 爲偶數狀況一樣，可以得到

定理：$h = a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_{2k+1} \in H_{2k+1}$ ，$\sigma_h = k$， h爲一 F-固定點

且 $a_2 = 9 - a_{2k+1}$， $a_{2k+1} = (a_k - a_{k+2}) - 1$

則 h 必爲性質 D 形式或性質 E 形式

定理：$h = a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_{2k+1} \in H_{2k+1}$ ，$\sigma_h = k$， h爲一 F-固定點

且 $a_2 = 9 - a_{2k+1}$， $a_{2k+1} = 9 - (a_2 - a_{2k})$

則 h 必爲性質 D 形式

上面兩定理可綜合成一結果：

定理：$h = a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_{2k+1} \in H_{2k+1}$ ，$\sigma_h = k$， h爲一 F-固定點

則 h 必爲性質 D 或性質 E 形式

下列定理中， $T = n - 2\sigma_n$ ，我們可以得到

定理： $h = a_1 a_2 \cdots\cdots a_n \in H_n$， $\sigma_n < \dfrac{n-1}{2}$ ，h 爲一 F-固定點

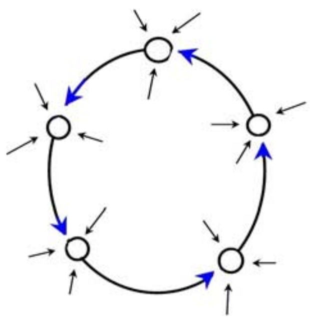
，且$T \neq \sigma_n \Rightarrow h$ 無解，

定理：$h = a_1 a_2 \cdots\cdots a_n \in H_n$， $\sigma_n < \dfrac{n-1}{2}$ ，h 爲一 F-固定點

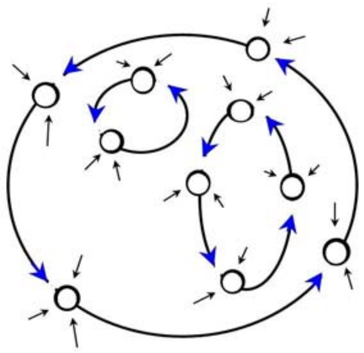
則 h 必爲性質 C 形式而已

結論

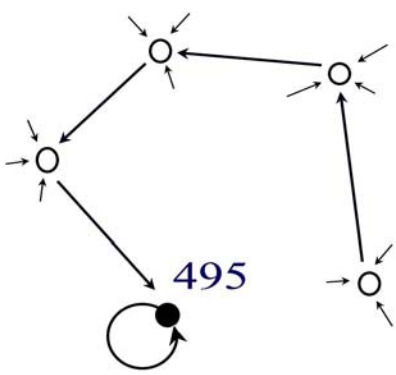
對於 $n = 2 , 3 , 4 , 5$ 的 F-對應情況，可在下列圖形中充分瞭解，而 $n \geq 5$ 時，H_n 的所有 F-固定點亦可根據性質 A , B, C , D , E 找出其個數及型式，例如以 $n =5$ 代入性質 C , D , E 無解，故在 H_5 沒有 F-極限點，而 $n = 6$ 時，代入性質 A , B , C 有兩個 F-極限點，995544 ，766431 而已，H_{11}，H_{13} 皆只有一個 F-極限點。對於其他 H_n 有多少封閉迴路，多少次 F-對應才能進入一封閉迴路或到一 F-極限點，也是一個很有趣的問題，值得我們去研究探討。



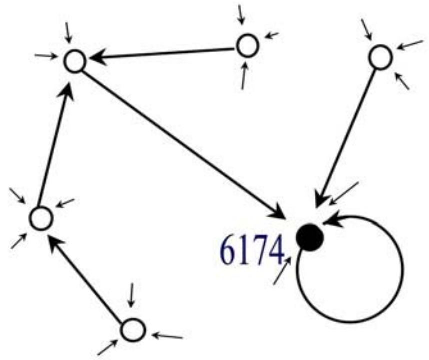
n = 2時 F之路徑



n = 5時 F之路徑



n = 3時 F之路徑



n = 4時 F之路徑