$\overline{x}$的抽樣分配

1. 袋中有 3 顆球，分別標❶ ❷ ❸，抽到❶得 1 元，抽到❷得 2 元，抽到❸得 3 元，設 x 表示得到的金額，求 (1)$E(x)$　(2) $Var(x)$　(3)畫出 x 機率分配圖

Sol：

設 x 表示得到的金額

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

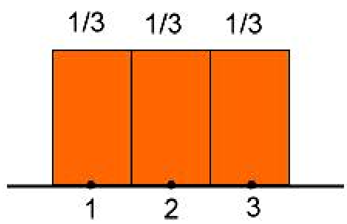
(1) $E(x)=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{3}=2$ 元

x^2	1	4	9
$p(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(x^2)=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$

(2) $Var(x)=E(x^2)-\left[E(x)\right]^2=\frac{14}{3}-2^2=\frac{2}{3}$元

(3)機率分配圖



2. 同上題，採取後放回的方法抽兩次，設 $\overline{x}$ 表示得到的金額，求 (1)$E(\overline{x})$　(2) $Var(\overline{x})$ (3)畫出 $\overline{x}$ 的機率分配圖

Sol：

設 $\overline{x}$ 表示得到的金額，先將所有可能列出

(第1次,第2次)	$\bar{x}$
(1,1)	1
(1,2)	1.5
(1,3)	2
(2,1)	1.5
(2,2)	2
(2,3)	2.5
(3,1)	2
(3,2)	2.5
(3,3)	3

機率分配

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$p(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

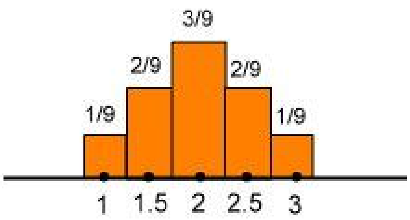
(1) $E(\bar{x})=1\cdot\left(\frac{1}{9}\right)+1.5\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+2\cdot\left(\frac{3}{9}\right)+2.5\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1+3+6+5+3}{9}=2$ 元

$\bar{x}^2$	1	2.25	4	6.25	9
$p(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(\bar{x}^2)=1\cdot\left(\frac{1}{9}\right)+2.25\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+4\cdot\left(\frac{3}{9}\right)+6.25\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1+4.5+12+12.5+9}{9}=\frac{39}{9}$

(2) $Var(\bar{x})=E(\bar{x}^2)-\left[E(\bar{x})\right]^2=\frac{39}{9}-2^2=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(3)機率分配圖



3. 同上題，採取後放回的方法抽 3 次，設 $\bar{x}$ 表示得到的金額，求 (1) $E(\bar{x})$ (2) $Var(\bar{x})$ (3)畫出 $\bar{x}$ 的機率分配圖

Sol：

設 $\bar{x}$ 表示得到的金額，先將所有可能列出(共有 27 種狀況)

(第1次,第2次,第3次)	$\bar{x}$
(1,1,1)	3/3
(1,1,2)	4/3
(1,1,3)	5/3
(1,2,1)	4/3
(1,2,2)	5/3
(1,2,3)	6/3
(1,3,1)	5/3
(1,3,2)	6/3
(1,3,3)	7/3
(2,1,1)	4/3
(2,1,2)	5/3
(2,1,3)	6/3
(2,2,1)	5/3
(2,2,2)	6/3
(2,2,3)	7/3
(2,3,1)	6/3
(2,3,2)	7/3
(2,3,3)	8/3
(3,1,1)	5/3
(3,1,2)	6/3
(3,1,3)	7/3
(3,2,1)	6/3
(3,2,2)	7/3
(3,2,3)	8/3
(3,3,1)	7/3
(3,3,2)	8/3
(3,3,3)	9/3

$\bar{x}$	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	9/3
$p(\bar{x})$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$(1)E(\bar{x})=\frac{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)+\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{27}\right)+\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{6}{27}\right)+\frac{6}{3}\cdot\left(\frac{7}{27}\right)+\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{6}{27}\right)+\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{27}\right)+\frac{9}{3}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)$$

$$=\frac{3}{81}+\frac{12}{81}+\frac{30}{81}+\frac{42}{81}+\frac{42}{81}+\frac{24}{81}+\frac{9}{81}=\frac{162}{81}=2\text{元}$$

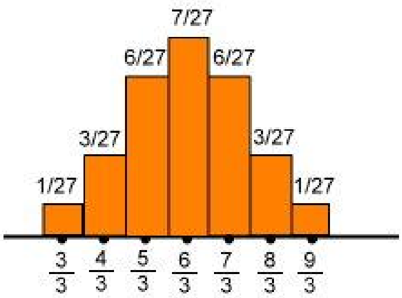
$\bar{x}^2$	$\frac{9}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{36}{9}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{81}{9}$
$p(\bar{x})$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$E(\bar{x}^2)=\left(\frac{9}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{16}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{27}\right)+\left(\frac{25}{9}\right)\cdot\left(\frac{6}{27}\right)+\left(\frac{36}{9}\right)\cdot\left(\frac{7}{27}\right)+\left(\frac{49}{9}\right)\cdot\left(\frac{6}{27}\right)$$

$$+\left(\frac{64}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{27}\right)+\left(\frac{81}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{27}\right)=\frac{9+48+150+252+294+192+81}{243}=\frac{1026}{243}=\frac{38}{9}$$

$$(2)\,Var(\bar{x})=E(\bar{x}^2)-\left[E(\bar{x})\right]^2=\frac{38}{9}-2^2=\frac{2}{9}$$

(3)機率分配圖



結論：由上述的三個題目可知(樣本數爲 n 的抽樣分配)

(1)期望值不變

(2)變異數會縮小 n 倍(標準差會縮 $\sqrt{n}$ 倍)

(3)隨著樣本數 n 愈來愈大，機率分配圖愈趨近鐘型

4. 假設台北市家庭每月電費呈常態分配，平均費用 1500 元，標準差 300 元，令 $\bar{x}$ 爲電費隨機樣本的平均數，問樣本數爲 (1)16　(2)100　(3)400 時，$\bar{x}$ 的平均數及標準差爲多少？

Sol：

$\mu=1500\,,\sigma=300$

$(1)\;n=16\quad \mu_{\bar{x}}=1500\quad \sigma_{\bar{x}}=\dfrac{300}{\sqrt{16}}=75$

(2) $n=100 \quad \mu_{\bar{x}}=1500 \quad \sigma_{\bar{x}}=\dfrac{300}{\sqrt{100}}=30$

(3) $n=400 \quad \mu_{\bar{x}}=1500 \quad \sigma_{\bar{x}}=\dfrac{300}{\sqrt{400}}=15$

中央極限定理(Central Limit Theorem)的應用：

當 $n\geq 30$ 時，$\bar{x}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

公式：$z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ ，其中 $\sigma_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 解應用問題

5. 一家成衣廠欲使用剪布機剪裁一批布料成爲平均長度 $\mu=1000mm$ ，標準差 $\sigma=12mm$ 的布塊，若連續抽取樣本大小 $n=36$ 的隨機樣本，則其樣本平均數 $\bar{x}$ 會落於 $995mm$ 與 $1005mm$ 之間的百分比爲？

   Sol：

$$P(995<\bar{x}<1005)=P\left(\frac{995-1000}{\frac{12}{\sqrt{36}}}<\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}<\frac{1005-1000}{\frac{12}{\sqrt{36}}}\right)$$
$$=P(-2.5<z<2.5)=0.4938+0.4938=0.9876=98.76\%$$

6. 已知台北市醫師每週工作平均時數 $\mu=50$ 小時，標準差 $\sigma=7$ 小時。

   (a)假設母體爲常態，一位醫師每週工作時數高於 51 小時的機率爲？

   (b)一組包含 49 位醫師的隨機樣本所產生之平均數 $\bar{x}$ ，$\bar{x}$ 高於 51 小時的機率爲？

   Sol：

   設 x 表醫師每週工作時數

   (a) $P(x>51)=P(z>\dfrac{51-50}{7})=P(z>0.14)=0.5-0.0557=0.4443=44.43\%$

   (b) $P(\bar{x}>51)=P(z>\dfrac{51-50}{7/\sqrt{49}})=P(z>1)=0.5-0.3413=0.1587=15.87\%$

7. 在一項調查，企業主管年薪平均數 $\mu=200$ 萬，標準差 $\sigma=48$ 萬

   (a)假設母體爲常態，一位企業主管年薪超過 220 萬的機率爲？

   (b)一組包含 36 位企業主管的隨機樣本所產生之年薪平均數 $\bar{x}$ ，$\bar{x}$ 高於 220 萬的機率爲？

Sol：

設 x 表企業主管年薪

(a) $P(x > 220) = P(z > \dfrac{220 - 200}{48}) = P(z > 0.42) = 0.5 - 0.1628 = 0.3372 = 33.72\%$

(b) $P(\bar{x} > 220) = P(z > \dfrac{220 - 200}{48/\sqrt{36}}) = P(z > 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062 = 0.62\%$

樣本比例 p_s 的抽樣分配

$E(p_s) = p$ ， $Var(p_s) = \dfrac{pq}{n}$

若 $np > 5, nq > 5$ ， $p_s \sim N\left(np, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$

8. 某鄉鎮有 1000 個家庭，其中 485 戶有自用轎車，今抽了 200 個家庭，發現有 98 戶有自用轎車，則母體比例 p 與樣本比例 p_s 各爲多少？

Sol：

$p = \dfrac{485}{1000} = 0.485 \quad p_s = \dfrac{98}{200} = 0.49$

9. 有一向對台北交通狀況滿意度的調查，發現 55%民眾滿意，現在從台北市民隨機抽了 400 人，則滿意比例在 60%到 70%的機率爲多少？

Sol：

$p = 0.55$ ， $n = 400$

$$\sigma_{p_s} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{400}} = 0.025$$

$$P(0.6 < p_s < 0.7) = P(\frac{0.6 - 0.55}{\sigma_{p_s}} < \frac{p_s - p}{\sigma_{p_s}} < \frac{0.7 - 0.55}{\sigma_{p_s}})$$

$$= P(\frac{0.6 - 0.55}{0.025} < \frac{p_s - p}{\sigma_{p_s}} < \frac{0.7 - 0.55}{0.025}) = P(2 < z < 6) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

10. 根據一項調查，有 40%的市民感到滿意，假設 p_s 爲樣本大小 $n = 100$ 的樣本比例，試求下列機率

(a) p_s 介於 0.36 與 0.45 之間

(b) p_s 小於 0.34

Sol：

$p = 0.4$ ， $n = 400$

$$\sigma_{p_s} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{100}} = 0.049$$

$$(a) \quad P(0.36 < p_s < 0.45) = P(0.36 - 0.4 < p_s - p < 0.45 - 0.4)$$

$$= P(\frac{0.36 - 0.4}{\sigma_{p_s}} < \frac{p_s - p}{\sigma_{p_s}} < \frac{0.45 - 0.4}{\sigma_{p_s}})$$

$$= P(\frac{0.36 - 0.4}{0.049} < z < \frac{0.45 - 0.4}{0.049}) = P(-0.82 < z < 1.02)$$

$$= 0.2939 + 0.3461 = 0.64$$

$$(b) \quad P(p_s < 0.34) = P(p_s - p < 0.34 - 0.4)$$

$$= P(\frac{p_s - p}{\sigma_{p_s}} < \frac{0.34 - 0.4}{\sigma_{p_s}}) = P(z < \frac{0.34 - 0.4}{0.049}) = P(z < -1.22)$$

$$= 0.5 - 0.3888 = 0.1112$$