常態分配

標準常態分配查表 $z \sim N(0,1)$

1. $P(0<z<1.52)=0.4357$　　2. $P(-0.86<z<1.43)=0.7287$

3. $P(0.68<z<2.13)=0.2317$　　4. $P(z>1.81)=0.0351$

5. $P(-2.10<z<-0.63)=0.2464$　　6. $P(z>-1.38)=0.9162$

7. $P(z<-1.77)=0.0384$　　8. $P(z=2.13)=0$

逆向查表

1.若 $P(0<z<k)=0.4370$，則 $k=1.53$　　2.若 $P(z>k)=0.1446$，則 $k=1.06$

3.若 $P(-k<z<k)=0.7016$，則 $k=1.04$　　4.若 $P(z>-k)=0.9495$，則 $k=1.64$

利用轉換公式：$z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 解應用問題

1.假設美國鯷魚的長度呈常態分配，此分配的平均數 $\mu=10.3$ 公分，標準差 $\sigma=0.65$ 公分，求下列長度鯷魚的百分比

(a) 9 公分以下　(b) 10.8 公分以上　(c)介於 9.5 公分到 10.6 公分之間

(d)某餐廳聲稱他們所售的鯷魚最長的前 20%，則他們所售的鯷魚至少要多少公分？

(e)某餐廳聲稱他們所售的鯷魚中等長度 30%，則他們所售的鯷魚介於多少公分之間？

Sol：

$$(a)\ P(x<9)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{9-10.3}{0.65})=P(z<-2)=0.5-0.4772=0.0228=2.28\%$$

$$(b)\ P(x>10.8)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{10.8-10.3}{0.65})=P(z>0.77)=0.5-0.2794=0.2206=22.06\%$$

$$(c)\ \ P(9.5<x<10.6)=P(\frac{9.5-10.3}{0.65}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{10.6-10.3}{0.65})=P(-1.23<z<0.46)$$
$$=0.1772+0.3907=0.5679=56.79\%$$

(d)查表得知 $z=0.84$

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}\quad\Rightarrow\ 0.84=\frac{x-10.3}{0.65}\ \Rightarrow\ 0.546=x-10.3\ \Rightarrow x=10.846\text{ 公分}$$

(e)查表得知 $z=\pm 0.39$

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow$$

$$0.39=\frac{x-10.3}{0.65} \Rightarrow \quad 0.2535=x-10.3 \Rightarrow x=10.5535$$

$$-0.39=\frac{x-10.3}{0.65} \Rightarrow -0.2535=x-10.3 \Rightarrow x=10.0465$$

2. 假設人類的智商呈常態分配，平均智商 $\mu=110$ 分，標準差 $\sigma=10$ 分，求下列百分比
   (a) 123 分以上　(b) 95 分以上 (c)介於 100 分到 120 分之間 (d) 89 分以下
   (e)軍校錄取新生，智商分數爲必要條件，若要求新生智商爲前 20%，則智商分數最低錄取分數爲多少？

Sol：

$$(a)\ P(x>123)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{123-110}{10})=P(z>1.3)=0.5-0.4032=0.0968=9.68\%$$

$$(b)\ P(x>95)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{95-110}{10})=P(z>-1.5)=0.5+0.4332=0.9332=93.32\%$$

$$(c)\ P(100<x>120)=P(\frac{100-110}{10}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{120-110}{10})=P(-1<z<1)=0.3413+0.3413$$

$$=0.6826=68.26\%$$

$$(d)\ P(x<89)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{89-110}{10})=P(z<-2.1)=0.5-0.4821=0.0179=1.79\%$$

(e) 查表得 $z=0.84$，根據 $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$0.84=\frac{x-110}{10} \quad \Rightarrow \quad 8.4=x-110 \quad \Rightarrow \quad x=118.4\text{分}$$

二項分配逼近常態分配(連續性修正因子)

注意： (1) $np>5$ ($np<5$ 請用 Poisson 分配)

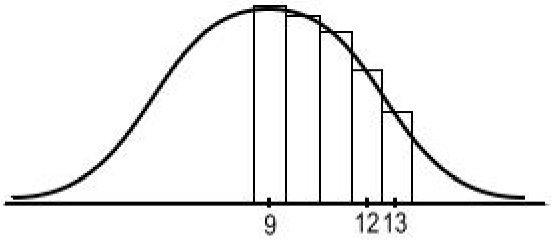
(2)要考慮連續性修正因子

1. 一家電池生產工廠，已知有 6%爲瑕疵品，由母體中隨機選取 150 顆電池，有 12 顆或更多瑕疵品的機率爲？

Sol：

6%爲瑕疵品，94%爲良品

$$P(x\geq 12)=P(x=12)+P(x=13)+\cdots\cdots=C_{12}^{150}(0.06)^{12}(0.94)^{138}+C_{13}^{150}(0.06)^{13}(0.94)^{137}+\cdots$$



$\mu = np = (150)\cdot(0.06) = 9, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(150)\cdot(0.06)(0.94)} = 2.9$

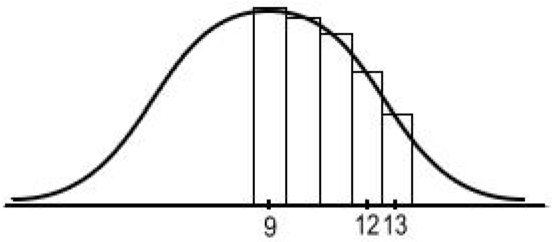
$P(x \geq 12) = P(x > 11.5) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{11.5-9}{2.9}) = P(z > 0.86) = 0.5 - 0.3051 = 0.1949$

2. 某家藥廠所生產的新心臟病藥治癒率有 60%，今有 15 個病人服用此新藥，有 12 人或更多被治癒的機率為？

Sol：

60%成功率，40%失敗率

$P(x \geq 12) = P(x = 12) + P(x = 13) + \cdots\cdots = C_{12}^{15}(0.6)^{12}(0.4)^{3} + C_{13}^{15}(0.6)^{13}(0.4)^{2} + \cdots$



$\mu = np = (15)\cdot(0.6) = 9, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(15)\cdot(0.6)(0.4)} = 1.9$

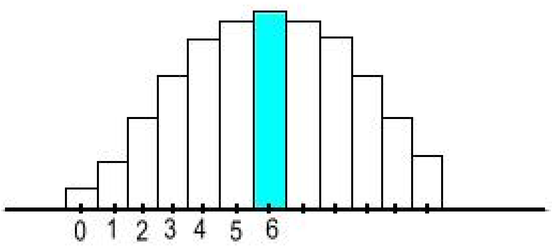
$P(x \geq 12) = P(x > 11.5) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{11.5-9}{1.9}) = P(z > 1.32) = 0.5 - 0.4066 = 0.0934$

3. 投擲一枚硬幣 12 次，(a)恰好出現 6 次正面的機率 (b)出現 5 次(或更多)正面的機率

Sol：算法一(二項分配)

$C_{6}^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{12!}{6!6!} \times \frac{1}{2^{12}} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1} \times \frac{1}{4096} = 0.2256$

算法二(常態分配)



$\mu = np = (12)(0.5) = 6, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(12)(0.5)(0.5)} = 1.732$

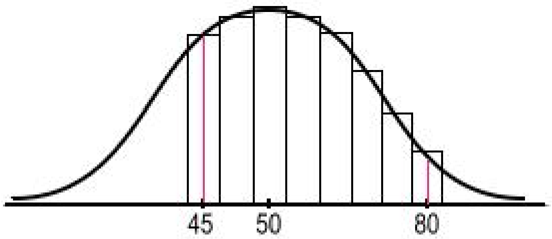
$P(x=6) = P(5.5 < x < 6.5) = P(\frac{5.5-6}{1.732} < z < \frac{6.5-6}{1.732})$

$= P(-0.29 < z < 0.29) = 0.1141 + 0.1141 = 0.2282$

4. 投擲一枚硬幣 100 次，(a)出現 45 次(包含)到 80 次(包含)個正面的機率

Sol：

$P(45 \le x \le 80) = \sum_{k=45}^{80} C_k^{100} (0.5)^k (0.5)^{100-k}$ 計算不易



$\mu = np = (100)(0.5) = 50, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.5)(0.5)} = 5$

$P(45 \le x \le 80) = P(44.5 < x < 80.5) = P(\frac{44.5-50}{5} < z < \frac{80.5-50}{5})$

$= P(-1.1 < z < 6.1) = 0.5 + 0.3643 = 0.8643$